

2017年工学部第3問

3  $\theta$  を  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  をみたす定数とし, 自然数  $n$  に対して  $a_n = \tan \frac{\theta}{2^n}$  とおく.

(1) 数列  $\{2^n a_n\}$  の極限を求めよ.

(2)  $n$  が 2 以上のとき  $\frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}} = a_n$  が成り立つことを示せ.

(3)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$  とおく.  $n$  が 2 以上のとき  $S_n$  を  $a_1$  と  $a_n$  で表せ.

(4) 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$  の和を求めよ.