

2010年第2問

2 定数  $a$ , 関数  $f(x)$ , および数列  $\{x_n\}$  を次のように定める.

$$1 < a < 2, \quad f(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - x^3)$$
$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 関数  $f(x)$  の増減を調べよ.
- (2) すべての自然数  $n$  に対して  $1 < x_n < 2$  を示せ.
- (3) すべての自然数  $n$  に対して  $x_{n+1} > x_n$  を示せ.
- (4) 次の不等式を満たす  $n$  に無関係な定数  $b$  ( $0 < b < 1$ ) があることを示せ.

$$2 - x_{n+1} \leq b(2 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (5) 数列  $\{x_n\}$  が収束することを示し, その極限值を求めよ.