



2015年理系第6問

6  $n$  を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数  $g(x)$  を次のように定める。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$  を連続な関数とし、 $p, q$  を実数とする。 $|x| \leq \frac{1}{n}$  をみたす  $x$  に対して  $p \leq f(x) \leq q$  が成り立つとき、次の不等式を示せ。

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

(2) 関数  $h(x)$  を次のように定める。

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$$