



2010年 第3問

1枚目 / 2枚



3 $t > 1$ を満たす実数 t に対して, $S(t) = \int_0^1 |xe^x - tx| dx$ とおくととき, 次の問いに答えよ.

- (1) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で, 方程式 $xe^x = tx$ を満たす x をすべて求めよ.
 (2) $S(t)$ を求めよ.
 (3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ.

$$(1) xe^x = tx \iff x(e^x - t) = 0$$

$$\text{よって, } \begin{cases} 1 < t \leq e \text{ のとき. } x = 0, \log t \\ t > e \text{ のとき. } x = 0 \end{cases}$$

(2) (i) $1 < t \leq e$ のとき.

$$0 \leq x \leq \log t \text{ において. } xe^x - tx \leq 0$$

$$\log t \leq x \leq 1 \text{ において. } xe^x - tx \geq 0$$

$$\text{よって. } S(t) = \int_0^{\log t} tx - xe^x dx + \int_{\log t}^1 xe^x - tx dx$$

$$= \left[\frac{t}{2} x^2 \right]_0^{\log t} - \int_0^{\log t} x(e^x)' dx + \int_{\log t}^1 x(e^x)' dx - \left[\frac{t}{2} x^2 \right]_{\log t}^1$$

$$= \frac{t}{2} (\log t)^2 - [xe^x]_0^{\log t} + \int_0^{\log t} e^x dx + [xe^x]_{\log t}^1 - \int_{\log t}^1 e^x dx - \frac{t}{2} + \frac{t}{2} (\log t)^2$$

$$= t(\log t)^2 - \frac{t}{2} - t \log t + [e^x]_0^{\log t} + e - t \log t - [e^x]_{\log t}^1$$

$$= t(\log t)^2 - \frac{t}{2} - 2t \log t + t - 1 + e - e + t$$

$$= t(\log t)^2 + \frac{3}{2}t - 2t \log t - 1$$

(ii) $t \geq e$ のとき.

$$0 \leq x \leq 1 \text{ において. } xe^x - tx \leq 0 \text{ あり}$$

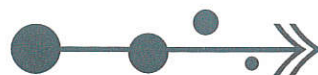
$$S(t) = \int_0^1 tx - xe^x dx$$

$$= \left[\frac{t}{2} x^2 \right]_0^1 - \int_0^1 x(e^x)' dx$$

$$= \frac{t}{2} - [xe^x]_0^1 + [e^x]_0^1$$

$$= \frac{t}{2} - e + e - 1$$

$$= \frac{t}{2} - 1$$



2010年第3問

2枚目 / 2枚

数理
石井K

3 $t > 1$ を満たす実数 t に対して, $S(t) = \int_0^1 |xe^x - tx| dx$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で, 方程式 $xe^x = tx$ を満たす x をすべて求めよ.
 (2) $S(t)$ を求めよ.
 (3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ.

(2) のつぎ

$$(i), (ii) \text{ より. } S(t) = \begin{cases} t(\log t)^2 + \frac{3}{2}t - 2t \log t - 1 & (1 < t \leq e \text{ のとき}) \\ \frac{t}{2} - 1 & (t \geq e \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3) (2) より. $t \geq e$ のときの最小値は $S(e) = \frac{e}{2} - 1$

$1 < t \leq e$ のときを考える.

$$\begin{aligned} S'(t) &= (\log t)^2 + t \cdot 2 \log t \cdot \frac{1}{t} + \frac{3}{2} - 2 \log t - 2 \\ &= (\log t)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\therefore S'(t) = 0$ とするのは. $\log t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち. $t = e^{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$t > 1$ であるから. $t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$\left(\begin{aligned} S(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}) &= e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \sqrt{2} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1 \\ &= (2 - \sqrt{2}) e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1 \end{aligned} \right) \text{ なくても O.K.}$$

t	(1)	...	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$...	e
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$			↘	↗	$\frac{e}{2} - 1$

増減表と. $t \geq e$ のときをあわせて.

$S(t)$ を最小にする t は. $t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$