0002108181987999

広島市立大学

2015年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=(x-1)^2\sqrt{2x+1}\ \left(x \geqq -\frac{1}{2}\right)$ を考える.

(1) $f'(x)$ を求め, $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0} f'(x)$ を調べよ. ただし, $x>a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき, $x \to a+0$ と表す.

(2) 関数 $f(x)$ の増減, 極値を調べ, グラフの概形をかけ. ただし, グラフの凹凸や変曲点は調べなくてよい.

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

(1) $f'(x) = 2(x-1)\sqrt{2x+1} + (x-1)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$= \frac{(x-1)(5x+1)}{\sqrt{2x+1}}$ $\left(x-1 \to -\frac{3}{2},\ 5x+1 \to -\frac{3}{2},\ 2x+1 \to +0\right)$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0} f'(x) = +\infty$ //

(2) (1)より, $f'(x)=0$ となるのは, $x=1,\ -\frac{1}{5}$

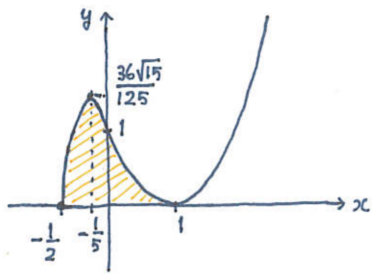
∴ 右の増減表より,

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{5}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{36\sqrt{15}}{125}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

極大値は $\frac{36\sqrt{15}}{125}$ ($x=-\frac{1}{5}$ のとき)

極小値は 0 ($x=1$ のとき)

∴ グラフは右のようになる.



(3) 求める面積は,

$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x-1)^2\sqrt{2x+1}\,dx = \int_0^3 \left(\frac{t-3}{2}\right)^2\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt$

$\left(\begin{array}{l} t=2x+1 \text{ として置換積分した} \\ dt=2dx,\quad \begin{array}{c|c} x & -\frac{1}{2}\to 1 \\ \hline t & 0\to 3 \end{array}\end{array}\right)$

$= \displaystyle\frac{1}{8}\int_0^3 t^{\frac{5}{2}} - 6t^{\frac{3}{2}} + 9t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}t^{\frac{5}{2}} + 6t^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}\cdot 27\sqrt{3} - \frac{12}{5}\cdot 9\sqrt{3} + 18\sqrt{3}\right)$

$= \frac{18}{35}\sqrt{3}$ //