



2015年工学部(前期M方式)第3問

 数理
石井K

3 x についての方程式 $\log_{\sqrt{2}} x + \log_x 16 = k$ は $|k| > \boxed{\text{ア}} \sqrt{2}$ のとき異なる2つの実数解 x_1, x_2 をもつ。

このとき、 $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = \frac{k}{\boxed{\text{イ}}}$ 、 $x_1^{\log_{\sqrt{2}} x_2} = \boxed{\text{ウエ}}$ である。

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2}} x + \log_x 16 &= \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} + \frac{\log_2 16}{\log_2 x} \\ &= 2 \log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} \end{aligned}$$

$$\therefore 2 \log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} = k$$

$$t = \log_2 x \text{ とおくと、} 2t + \frac{4}{t} = k \iff 2t^2 - kt + 4 = 0 \dots (*)$$

判別式を D とおくと、 $D > 0$ より

$$D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 > 0 \quad \therefore k^2 > 32 \quad \therefore |k| > 4\sqrt{2} //$$

(*) において 解と係数の関係より、

~~$$\log_{\sqrt{2}} x_2 = \frac{\log_2 x_2}{\log_2 \sqrt{2}} = 2 \log_2 x_2$$~~

$$\begin{cases} \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = \frac{k}{2} // \\ (\log_2 x_1)(\log_2 x_2) = 2 \dots \textcircled{1} \end{cases}$$

$$S = x_1^{\log_{\sqrt{2}} x_2} \text{ とおくと、} \log_2 S = (\log_{\sqrt{2}} x_2) \cdot \log_2 x_1$$

↓ 底の変換公式

$$\therefore \log_2 S = 2(\log_2 x_2) \cdot (\log_2 x_1)$$

$$\textcircled{1} \text{ より、} \log_2 S = 4$$

$$\therefore S = 16 //$$