愛媛大学

2016年 医学部 第3問　　1枚目／2枚

数理 石井K

3　z_0 を虚数単位 i と異なる複素数とする．複素数 z_n を

$$z_n = i + \frac{\sqrt{2}(z_{n-1}-i)(1+i)}{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．

(1) すべての自然数 n に対し $z_n \neq i$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{z_n - i}{z_{n-1}-i}$ の絶対値 r と偏角 θ を求めよ．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) $z_m = z_0$ となる最小の自然数 m を求めよ．

(4) 複素数平面上において z_n の表す点を P_n とする．(3) で求めた m に対し m 本の線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，…，$\mathrm{P}_{m-1}\mathrm{P}_m$ で囲まれる図形の面積を S とする．$z_0 = 1-i$ のとき S の値を求めよ．

(1) 背理法により示す.

$z_n = i$ となる n が存在すると仮定し，そのうち最小の n を n_0 とする．$z_0 \neq i$ より，$n_0 \geqq 1$

このとき，

$$z_{n_0} = i + \frac{\sqrt{2}(z_{n_0-1}-i)(1+i)}{2}$$

であるから，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(z_{n_0-1}-i)(1+i) = 0$

$$\therefore\ z_{n_0-1} = i$$

よって，n_0 の最小性に反し，矛盾．

したがって，すべての自然数 n に対し，$z_n \neq i$ が成り立つ ▨

(2) 漸化式の両辺を $z_{n-1}-i\ (\neq 0)$ で割って，　において，i を移項したもの

$$\frac{z_n - i}{z_{n-1}-i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \underline{r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{4}}\ /\!/$$

(3) (2)より，$z_n - i = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(z_{n-1}-i)$

∴ 数列 $\{z_n - i\}$ は，$n=0$ のとき，$z_0 - i$，公比 $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ の等比数列より

$$z_n - i = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n \cdot (z_0 - i) = \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)(z_0 - i)$$

$z_m = z_0 \Longleftrightarrow z_m - i = z_0 - i$ であるから

最小の自然数 m は，$\underline{m = 8}\ /\!/$

2016年 医学部 第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

3 z_0 を虚数単位 i と異なる複素数とする．複素数 z_n を

$$z_n = i + \frac{\sqrt{2}(z_{n-1} - i)(1+i)}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．

(1) すべての自然数 n に対し $z_n \neq i$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{z_n - i}{z_{n-1} - i}$ の絶対値 r と偏角 θ を求めよ．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) $z_m = z_0$ となる最小の自然数 m を求めよ．

(4) 複素数平面上において z_n の表す点を P_n とする．(3) で求めた m に対し m 本の線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\cdots$，$\mathrm{P}_{m-1}\mathrm{P}_m$ で囲まれる図形の面積を S とする．$z_0 = 1 - i$ のとき S の値を求めよ．

(4) $z_n' = z_n - i$ とおく

また，z_n' の表す点を P_n' とする．

P_n' は P_n を $-i$ だけ平行移動したものなので

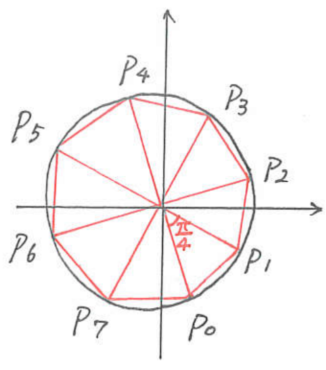
m 本の線分 $P_0'P_1'$，$P_1'P_2'$，…，$P_{m-1}'P_m'$ で囲まれる図形の面積 S' は，$S' = S$ となる．

このとき，$z_0' = 1 - 2i$

$z_n' = \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) z_0'$

$\therefore |OP_k| = |z_0'| = \sqrt{5} \quad (k = 0, 1, \cdots, m)$

$\angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \cdots = \angle P_{m-1}OP_m = \frac{\pi}{4}$



よって，

$S = S'$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \times 8$

$= \underline{10\sqrt{2}}$ //