

2010年教育学部（中等数学）第2問

2 自然数  $N$  は 30 の倍数である。

$$U = \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 以上 } N \text{ 以下の奇数}\},$$

$$A = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\},$$

$$B = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 5 \text{ の倍数}\},$$

とし、集合  $U$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$  の要素の個数をそれぞれ  $u_N$ ,  $a_N$ ,  $b_N$ ,  $c_N$  と表す。次の問いに答えよ。

(1)  $u_N$ ,  $a_N$ ,  $b_N$ ,  $c_N$  を  $N$  を用いて表せ。

(2)  $N$  以下の素数の個数を  $P_N$  とするとき、不等式  $P_N \leq u_N - a_N - b_N + c_N + 2$  を示せ。

(3) (2) の  $P_N$  について、 $\frac{P_N}{N} \leq \frac{1}{3}$  を示せ。