0001924365708999

名古屋市立大学

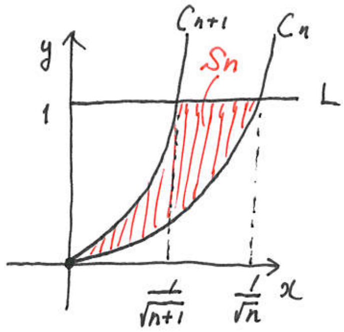
2014年 第4問

$\boxed{4}$ xy 平面において，曲線 $y = nx^2$（n は自然数，$x \geqq 0$）を C_n とし，直線 $y = 1$ を L とする．2つの曲線 C_n，C_{n+1} および L で囲まれた図形の面積を S_n とする．次の問いに答えよ．

(1) S_n を求めよ．

(2) 任意の n に対して $S_n > S_{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k > \frac{1}{2}$ となる最小の n を求めよ．



(1)
$$S_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} (n+1)x^2 - nx^2\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 1 - nx^2\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} + \left[x - \frac{nx^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
$$= \frac{1}{3(n+1)\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{n}{3(n+1)\sqrt{n+1}}$$
$$= \underline{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}\ //$$

(2)
$$S_n = \frac{2}{3\sqrt{n(n+1)}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
であるから．S_n は単調減少．

$\therefore\ S_n > S_{n+1}$ ■

(3)
$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$\therefore\ 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{3}{4} \qquad \therefore\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{4} \iff \frac{1}{n+1} < \frac{1}{16}$$
$$\iff n+1 > 16$$
$$\iff n > 15$$
$$\therefore\ \underline{n = 16}\ //$$