2015年 芸術工学部 第1問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$\vec{p}=-\vec{a}+3\vec{b}$，$\vec{q}=\frac{1}{5}(\vec{a}+3\vec{b})$ とする．$|\vec{p}|=5$，$|\vec{q}|=2$ であるとき，次の問いに答えよ．

(i) $\vec{a}$，$\vec{b}$ をそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表せ．

(ii) $\sqrt{2}|\vec{a}|=3|\vec{b}|$ のとき，内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{6}(\cos x-\sin x)-\frac{7}{4}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$0\leqq x\leqq 2\pi$ とする．

(i) $t=\cos x-\sin x$ とおく．t のとりうる値の範囲を求め，$f(x)$ を t の式で表せ．

(ii) $f(x)$ の最大値と最小値，およびそれらを与える x の値を求めよ．

(1)(i) $-\vec{a}+3\vec{b}=\vec{p}$ …①，$\vec{a}+3\vec{b}=5\vec{q}$ …②

②−①より，$2\vec{a}=-\vec{p}+5\vec{q}$　　$\therefore\ \underline{\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{5}{2}\vec{q}}$ //

①+②より，$6\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$　　$\therefore\ \underline{\vec{b}=\frac{1}{6}\vec{p}+\frac{5}{6}\vec{q}}$ //

(ii) (i)より，$|\vec{a}|^2=\frac{1}{4}|\vec{p}|^2-\frac{5}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}+\frac{25}{4}|\vec{q}|^2$

$=\frac{125}{4}-\frac{5}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}$ …③

$|\vec{b}|^2=\frac{1}{36}|\vec{p}|^2+\frac{5}{18}\vec{p}\cdot\vec{q}+\frac{25}{36}|\vec{q}|^2$

$=\frac{125}{36}+\frac{5}{18}\vec{p}\cdot\vec{q}$ …④

$\sqrt{2}|\vec{a}|=3|\vec{b}|$ のとき，両辺2乗して，$2|\vec{a}|^2=9|\vec{b}|^2$

これに③，④を代入して，$\frac{125}{2}-5\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{125}{4}+\frac{5}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}$

$\therefore\ \frac{15}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{125}{4}$　　$\therefore\ \underline{\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{25}{6}}$ //

(2)(i) $t=-\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より，$-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{7}{4}\pi$　　$\therefore\ \underline{-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}}$ //

また，$t^2=1-2\sin x\cos x$ より，$\sin 2x=1-t^2$

$\therefore\ f(x)=1-t^2+\sqrt{6}t-\frac{7}{4}$

$=\underline{-t^2+\sqrt{6}t-\frac{3}{4}}$ //

2015年 芸術工学部 第1問　**2枚目／2枚**

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，$\vec{p} = -\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{q} = \dfrac{1}{5}(\vec{a} + 3\vec{b})$ とする．$|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 2$ であるとき，次の問いに答えよ．

(i) $\vec{a}$, $\vec{b}$ をそれぞれ $\vec{p}$, $\vec{q}$ を用いて表せ．

(ii) $\sqrt{2}|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ のとき，内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{6}(\cos x - \sin x) - \dfrac{7}{4}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

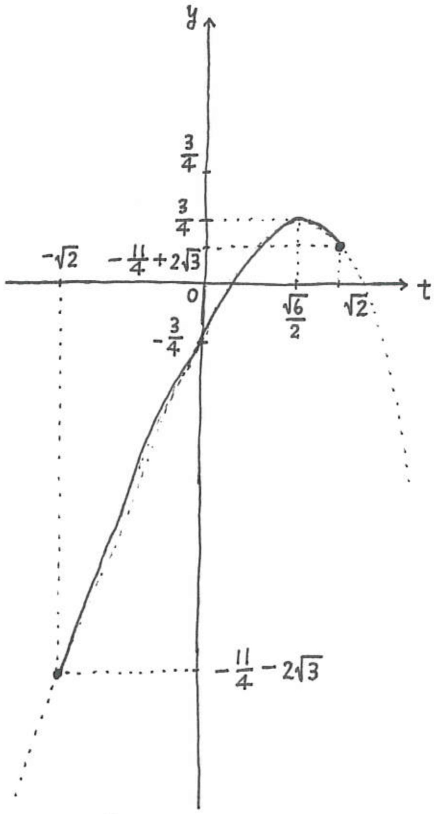
(i) $t = \cos x - \sin x$ とおく．t のとりうる値の範囲を求め，$f(x)$ を t の式で表せ．

(ii) $f(x)$ の最大値と最小値，およびそれらを与える x の値を求めよ．

(2)(ii)

(i) より $f(x)$ を t で表したものを y とおくと，

$$
\begin{aligned}
y &= -t^2 + \sqrt{6}t - \frac{3}{4} \\
&= -(t^2 - \sqrt{6}t) - \frac{3}{4} \\
&= -\left(t - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \\
&= -\left(t - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$



$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ と $2 = \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

注意してグラフをかくと右のようになる．　$\therefore 1 < \dfrac{\sqrt{6}}{2} < \sqrt{2}$

$\therefore$ また．$t = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \iff -\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$$
\begin{aligned}
&\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\iff x - \frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi \\
&\iff x = \frac{19}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi
\end{aligned}
$$

$t = -\sqrt{2} \iff x = \dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore$ $f(x)$ の最大値は $\dfrac{3}{4}\left(x = \dfrac{19}{12}\pi, \dfrac{23}{12}\pi\right)$，最小値は $-\dfrac{11}{4} - 2\sqrt{3}\ \left(x = \dfrac{3}{4}\pi\right)$ //