

2012年第4問

 4 一辺の長さが a の正八面体の体積と、この正八面体に内接する球、外接する球の半径を求めよ。

正八面体の上側半分を考えると、四角すい

 であり、底面の正方形の面積は a^2 である。

 この四角すいの高さを h とおくと、

右図の赤い直角三角形において、三平方の定理より、

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = a^2 \quad \therefore h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

 \therefore 求める正八面体の体積は、四角すいの体積の2倍なので

$$a^2 \times h \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 //$$

右の赤い直角三角形に注目すると、

 内接する球は右のように接する。半径を r とおくと、

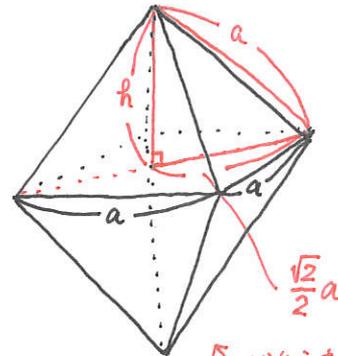
赤い直角三角形の面積を考えると

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times r \quad \therefore r = \frac{\sqrt{6}}{6}a //$$

 外接する球の半径 R は、球が正八面体の6つの

 頂点を通ることから、上で求めた h に等しい

$$\text{すなわち、} R = h = \frac{\sqrt{2}}{2}a //$$


 どちらも球の中心
は正方形の対角
線の交点となる。
