2015年 医学部 第1問　　1枚目／2枚

$\boxed{1}$ 点 A$\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ および放物線 $C : y = \frac{x^2}{2}$ を考える．点Aを通る傾き m の直線を ℓ とする．ただし，m は正である．次の問いに答えよ．

(1) C と ℓ の交点の座標を m で表せ．

(2) 第2象限において C，ℓ および x 軸で囲まれる図形の面積 $S(m)$ を求めよ．

(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を $T(m)$ とする．$\frac{T(m)}{mS(m)} = 18$ となる m に対し，$\frac{n}{10} < m < \frac{n+1}{10}$ を満たす自然数 n を求めよ．

(1) $\ell : y = m(x+1) + \frac{1}{2}$　　$\therefore\ \ell : y = mx + m + \frac{1}{2}$ $\cdots$①　　$C : y = \frac{x^2}{2}$ $\cdots$②

①，②より．$\frac{x^2}{2} - \left(mx + m + \frac{1}{2}\right) = 0$

$\therefore\ x^2 - 2mx - 2m - 1 = 0$　　これを解くと，$x = m \pm \sqrt{(m+1)^2}$

$m > 0$ より．$x = -1,\ 2m+1$　②に代入すると，交点は $\underline{\left(-1,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(2m+1,\ \frac{(2m+1)^2}{2}\right)}$ //

(2) ℓ と x 軸との交点を求めると，

$0 = mx + m + \frac{1}{2}$　　$\therefore\ x = -1 - \frac{1}{2m}$

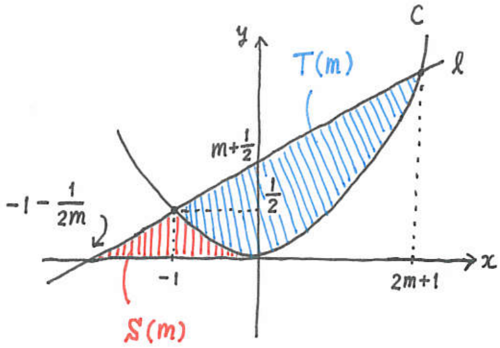
$\therefore \left(-1 - \frac{1}{2m},\ 0\right)$

右の図より．

$$S(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2} + \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8m} + \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \underline{\frac{1}{8m} + \frac{1}{6}}\ //$$



(3) $$T(m) = \int_{-1}^{2m+1} mx + m + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{2m+1} (x+1)\{x - (2m+1)\}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \{2m+1-(-1)\}^3$$

$$= \frac{2}{3}(m+1)^3$$

$\therefore\ \frac{T(m)}{mS(m)} = 18$ に代入して，$\frac{2}{3}(m+1)^3 = \frac{9}{4} + 3m$

$\therefore\ 8(m+1)^3 = 27 + 36m$

2枚目へつづく

0002126363787999

名古屋市立大学

2015年 医学部 第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ および放物線 $C : y = \frac{x^2}{2}$ を考える．点Aを通る傾き m の直線を ℓ とする．ただし，m は正である．次の問いに答えよ．

(1) C と ℓ の交点の座標を m で表せ．

(2) 第2象限において C，ℓ および x 軸で囲まれる図形の面積 $S(m)$ を求めよ．

(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を $T(m)$ とする．$\frac{T(m)}{mS(m)} = 18$ となる m に対し，$\frac{n}{10} < m < \frac{n+1}{10}$ を満たす自然数 n を求めよ．

(3) のつづき

$8m^3 + 24m^2 - 12m - 19 = 0$

$f(m) = 8m^3 + 24m^2 - 12m - 19$ とおく $(m > 0)$

$\therefore f'(m) = 24m^2 + 48m - 12$

$\quad = 12(2m^2 + 4m - 1)$

$\therefore f'(m) = 0$ となるのは．$m = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$　$m > 0$ より．$m = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$

よって，増減表は右になり，グラフは右下になる．

m	(0)	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(m)$		$-$	0	$+$
$f(m)$	(-19)	$\searrow$		$\nearrow$

$\frac{-2+\sqrt{4}}{2} < \frac{-2+\sqrt{6}}{2} < \frac{-2+\sqrt{9}}{2}$ より．$0 < \frac{-2+\sqrt{6}}{2} < \frac{1}{2}$

$\therefore m \geqq \frac{1}{2}$ において．$f(m)$ は単調増加

また，$f\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{729}{1000} \cdot 8 + 24 \cdot \frac{81}{100} - 12 \cdot \frac{9}{10} - 19$

$\quad = -\frac{566}{125}$

$\quad < 0$

$f(1) = 8 + 24 - 12 - 19$

$\quad = 1$

$\quad > 0$

$\therefore f(m) = 0$ となる m は．$\frac{9}{10} < m < 1$ をみたす．

$\therefore \underline{n = 9}$ //