

2015年 医学部 第4問

4 空間内の点  $O, A_1, A_2, B, C$  を考える. このとき, ベクトル  $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}$  はともに長さが 1 で, 角度  $\theta$  ( $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) をなす. また点  $B$  は  $O, A_1, A_2$  を含む平面  $H$  上に存在せず, ベクトル  $\overrightarrow{OB}$  は,  $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB} = c_1, \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OB} = c_2$  を満たす (ただし  $c_1, c_2$  はいずれも 0 でない実数であるとする). さらにベクトル  $\overrightarrow{OC}$  は,  $\overrightarrow{OC} = c_1 \overrightarrow{OA_1} + c_2 \overrightarrow{OA_2}$  のように表され, かつベクトル  $\overrightarrow{CB}$  と垂直である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 角度  $\theta$  を求めよ.
- (2)  $|\overrightarrow{OB}|^2 > c_1^2 + c_2^2$  が成り立つことを示せ. ただし,  $|\overrightarrow{OB}|$  はベクトル  $\overrightarrow{OB}$  の長さを表す.
- (3)  $c_1 = c_2 = c, |\overrightarrow{OB}| = b$  とする. また,  $\overrightarrow{OD_1} = c \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OD_2} = c \overrightarrow{OA_2}$  となるように, 空間上に点  $D_1, D_2$  を与える. 四面体  $D_1 D_2 C B$  の体積を,  $b, c$  を用いて表せ.
- (4) (3) の条件の下で 3 点  $D_1, D_2, B$  により定まる平面に対し, 点  $C$  から垂線を引いたとき, 垂線と平面の交点を  $T$  とする. このとき,  $CT$  の長さを  $b, c$  で表せ.