

2011年工学部第3問

 数理
石井K

 3 2つの曲線 $C_1: y = x \log x$, $C_2: y = 2x \log x$ について, 次の問いに答えよ. ただし, $x > 0$ である.

- (1) C_1 と C_2 に共通する接線 l の方程式を求めよ.
 (2) C_1 , C_2 および l で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

 (1) C_1 における接点を $(s, s \log s)$ ($s > 0$) とおくと,

 $y' = \log x + 1$ より, 接線は.

$$y = (\log s + 1)(x - s) + s \log s \iff y = (\log s + 1)x - s \quad \dots \textcircled{1}$$

 C_2 における接点を $(t, 2t \log t)$ ($t > 0$) とおくと,

 $y' = 2 \log x + 2$ より, 接線は.

$$y = 2(\log t + 1)(x - t) + 2t \log t \iff y = 2(\log t + 1)x - 2t \quad \dots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ は同一の直線を表すから, 係数を比較して,

$$\begin{cases} \log s + 1 = 2 \log t + 2 & \dots \textcircled{3} \\ s = 2t & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

 $\textcircled{4}$ を $\textcircled{3}$ に代入して, $\log 2t - 2 \log t = 1$

$$\therefore \log \frac{2}{t} = 1 \quad \therefore \frac{2}{t} = e \quad \therefore t = \frac{2}{e} \quad \therefore \textcircled{4} \text{ より } s = \frac{4}{e}$$

$$\therefore \textcircled{1} \text{ に代入して, } \underline{\underline{l: y = (2 \log 2)x - \frac{4}{e}}}$$

(2) 右図より.

$$S = \int_{\frac{2}{e}}^1 2x \log x - (2 \log 2)x + \frac{4}{e} dx + \int_1^{\frac{4}{e}} x \log x - (2 \log 2)x + \frac{4}{e} dx$$

$$= \int_{\frac{2}{e}}^1 (x^2)' \log x dx + \int_1^{\frac{4}{e}} (\frac{1}{2}x^2)' \log x dx - \int_{\frac{2}{e}}^{\frac{4}{e}} (2 \log 2)x - \frac{4}{e} dx$$

$$= [x^2 \log x]_{\frac{2}{e}}^1 - \int_{\frac{2}{e}}^1 x dx + [\frac{1}{2}x^2 \log x]_1^{\frac{4}{e}} - \int_1^{\frac{4}{e}} \frac{1}{2}x dx - \left[(\log 2)x^2 - \frac{4}{e}x \right]_{\frac{2}{e}}^{\frac{4}{e}}$$

$$= -\frac{4}{e^2} \log \frac{2}{e} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{2}{e}}^1 + \frac{8}{e^2} \log \frac{4}{e} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{\frac{4}{e}} - (\log 2) \cdot \frac{16}{e^2} + \frac{16}{e^2} + (\log 2) \cdot \frac{4}{e^2} - \frac{8}{e^2}$$

$$= -\frac{4}{e^2} (\log 2 - 1) - \frac{1}{2} + \frac{2}{e^2} + \frac{8}{e^2} (2 \log 2 - 1) - \frac{4}{e^2} + \frac{1}{4} - \frac{16 \log 2}{e^2} + \frac{16}{e^2} + \frac{4 \log 2}{e^2} - \frac{8}{e^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{e^2} - \frac{1}{4}}}$$

