2015年 理系 第4問



$\boxed{4}$ $a>0$ とし，$I=\int_0^1 |a\sqrt{x}-x|\,dx$ とする．

(1) $a\sqrt{x}-x=0$ を満たす $x$ を求めよ．

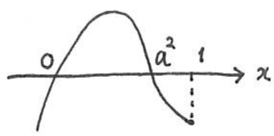
(2) $I$ を $a$ を用いて表せ．

(3) $a$ が $a>0$ の範囲を動くとき，$I$ の最小値を求めよ．

(1) $\sqrt{x}(a-\sqrt{x})=0$ と $a>0$ より．

$x=0$ または $x=a^2$　$\therefore\ \underline{x=0,\ a^2}$ //

(2) (1) より．$0\leqq x\leqq a^2$ において，$a\sqrt{x}-x\geqq 0$ なので




(i) $0<a<1$ のとき．

$$I=\int_0^{a^2} a\sqrt{x}-x\,dx+\int_{a^2}^1 -(a\sqrt{x}-x)\,dx$$

$$=\left[\frac{2a}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{a^2}-\left[\frac{2a}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_{a^2}^1$$

$$=\frac{2}{3}a^4-\frac{1}{2}a^4-\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a^4-\frac{1}{2}a^4$$

$$=\frac{1}{3}a^4-\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}$$

(ii) $a\geqq 1$ のとき．$0\leqq x\leqq 1$ において．$a\sqrt{x}-x\geqq 0$ より

$$I=\int_0^1 a\sqrt{x}-x\,dx$$

$$=\left[\frac{2a}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$$

(i),(ii) より．$I=\begin{cases}\frac{1}{3}a^4-\frac{2}{3}a+\frac{1}{2} & (0<a<1\text{ のとき})\\ \frac{2}{3}a-\frac{1}{2} & (a\geqq 1\text{ のとき})\end{cases}$ //

(3) $0<a<1$ のとき．$I'(a)=\frac{4}{3}a^3-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\left(a^3-\frac{1}{2}\right)$　$\therefore I'(a)=0$ となるのは．$a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$a\geqq 1$ のとき．$I'(a)=\frac{2}{3}>0$

$\therefore$ I増減表は右のようになる．

| $a$ | (0) | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I'(a)$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $I(a)$ | | ↘ | | ↗ | | ↗ |

$\therefore$ 最小値は $I\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\underline{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}$ //