2016年 文系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 空間内に4点O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)がある．αは$0<\alpha<1$を満たす定数とし，点P，Q，Rをそれぞれ次のように定める．

- Pは$PA^2+PB^2+PC^2$の値を最小にする点
- QはPBを$\alpha:1-\alpha$に内分する点
- RはOCを$\alpha:1-\alpha$に内分する点

このとき，次の問いに答えなさい．

(1) Pの座標を求めなさい．
(2) Q，Rの座標をαを用いてそれぞれ表しなさい．
(3) △CPRと△BCQの面積をそれぞれS_1，S_2とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$を求めなさい．

(1) $P(x, y, z)$とすると，

$$PA^2+PB^2+PC^2=(x-1)^2+y^2+z^2+x^2+(y-1)^2+z^2+x^2+y^2+(z-1)^2$$
$$=3x^2-2x+3y^2-2y+3z^2-2z+3$$
$$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+3\left(z-\frac{1}{3}\right)^2+2$$

∴最小になるのは．$x=y=z=\frac{1}{3}$のとき　∴ $\underline{P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$ //

(2) $\overrightarrow{OQ}=(1-\alpha)\overrightarrow{OP}+\alpha\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1-\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}, \frac{1-\alpha}{3}\right)$　∴ $\underline{Q\left(\frac{1-\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}, \frac{1-\alpha}{3}\right)}$ //

$\overrightarrow{OR}=\alpha\overrightarrow{OC}=(0, 0, \alpha)$　∴ $\underline{R(0, 0, \alpha)}$ //

(3) $\overrightarrow{CP}=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{CR}=(0, 0, \alpha-1)$　∴ $|\overrightarrow{CP}|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$|\overrightarrow{CR}|=1-\alpha$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CR}=\frac{2}{3}(1-\alpha)$

$$\therefore S_1=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CP}|^2|\overrightarrow{CR}|^2-(\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CR})^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}(1-\alpha)$$

$\overrightarrow{BC}=(0, -1, 1)$，$\overrightarrow{BQ}=\left(\frac{1-\alpha}{3}, \frac{-2+2\alpha}{3}, \frac{1-\alpha}{3}\right)$　∴ $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{BQ}|=\frac{\sqrt{6}}{3}(1-\alpha)$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BQ}=1-\alpha$

$$\therefore S_2=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2|\overrightarrow{BQ}|^2-(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BQ})^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}(1-\alpha)$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\underline{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$ //