同志社大学

2014年 理工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標空間において原点O(0, 0, 0)と，3点A(a, a, b), B(a, b, a), C(b, a, a) ($b > a \geqq 0$)を頂点とする四面体OABCを考える．次の問いに答えよ．

(1) △ABCの面積Sを求めよ．

(2) 四面体OABCの体積Vを求めよ．

(3) 四面体OABCが正四面体となる条件を，aとbを用いて表せ．

(4) a, bがともに自然数のとき，(3)の条件を満たすbの最小値と，そのときのaの値をそれぞれ求めよ．また，そのときのSとVを求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB} = (0,\ b-a,\ a-b)$, $\overrightarrow{BC} = (b-a,\ a-b,\ 0)$, $\overrightarrow{CA} = (a-b,\ 0,\ b-a)$ より.

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{0+(b-a)^2+(a-b)^2} = \sqrt{2}(b-a)$ $\quad (\because b > a)$

∴ △ABCは. 一辺の長さが $\sqrt{2}(b-a)$ の正三角形.

$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}(b-a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}(b-a)$

$= \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}(b-a)^2}$ //

(2) △ABCの重心をGとおくと. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \frac{2a+b}{3}(1,1,1)$

$\therefore \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(2a+b)\{b-a+a-b\} = 0$, 同様に. $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\therefore \overrightarrow{OG} \perp$ △ABC　また, $|\overrightarrow{OG}| = \frac{2a+b}{3} \cdot \sqrt{3}$

$\therefore V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overrightarrow{OG}|$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (b-a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (2a+b)$

$= \underline{\frac{1}{6}(2a+b)(b-a)^2}$ //

(3) 四面体OABCが正四面体 $\iff |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}|$

であるから,

$\sqrt{2a^2+b^2} = \sqrt{2}(b-a)$

両辺を2乗して. $2a^2+b^2 = 2a^2-4ab+2b^2$

$\therefore b(b-4a) = 0$

$b > 0$ より. $\underline{b = 4a}$ //

(4) (3)より. $\underline{a=1,\ b=4}$ //

このとき. (1)より. $\underline{S = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}}$ //

(2)より. $\underline{V = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3^2 = 9}$ //