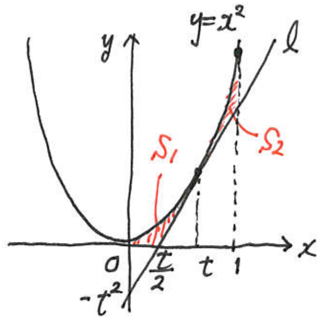
0001635814638999

一橋大学

2014年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $0 < t < 1$ とし，放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を $\ell$ とする．$C$ と $\ell$ と $x$ 軸で囲まれる部分の面積を $S_1$ とし，$C$ と $\ell$ と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を $S_2$ とする．$S_1 + S_2$ の最小値を求めよ．




$\ell : y = 2t(x-t) + t^2$

$\therefore\ y = 2tx - t^2$

$\ell$ と $x$ 軸の交点は $\left(\frac{t}{2}, 0\right)$

$$\therefore S_1 = \int_0^t x^2 - (2tx - t^2)\,dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}\cdot t^2$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - tx^2 + t^2x\right]_0^t - \frac{t^3}{4}$$

$$= \frac{t^3}{12}$$

$$S_2 = \int_t^1 x^2 - (2tx - t^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - tx^2 + t^2x\right]_t^1$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3}$$

$$\therefore S_1 + S_2 = -\frac{1}{4}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3}$$

これを $S(t)$ とおくと，

$$S'(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 2t - 1$$

$\therefore\ S'(t) = 0$ となるのは

$t = \frac{2}{3},\quad 2$

$0 < t < 1$ より $t = \frac{2}{3}$

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}$ | $\cdots$ | $(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $S(t)$ | | $\searrow$ | $\frac{1}{27}$ | $\nearrow$ | |

極小

$\therefore\ S_1 + S_2$ の最小値は $\frac{1}{27}$ $\left(t = \frac{2}{3}\right)$ //