2015年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 2つの放物線

$$C_1 : y = x^2,\quad C_2 : y = -(x-1)^2$$

がある．a は0でない実数とし，C_1 上の2点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を ℓ とする．

(1) ℓ の方程式を a で表せ．

(2) C_2 と ℓ が異なる2つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) C_2 と ℓ が異なる2つの共有点R，Sをもつとする．線分PQの長さと線分RSの長さが等しくなるとき，a の値を求めよ．

(1) 直線PQの傾きは，$\dfrac{a^2-4a^2}{a-(-2a)} = -a$

∴ C_1 において，$y' = 2x$ より，$2x = -a$ ∴ $x = -\dfrac{a}{2}$

∴ 接点の座標は $\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a^2}{4}\right)$ このとき，ℓ は，$y = -a\left(x + \dfrac{a}{2}\right) + \dfrac{a^2}{4}$

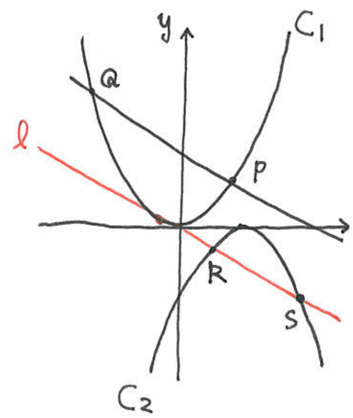
∴ $\underline{\ell : y = -ax - \dfrac{a^2}{4}}$ //

(2) $-ax - \dfrac{a^2}{4} + (x-1)^2 = 0 \iff x^2 - (a+2)x + 1 - \dfrac{a^2}{4} = 0$

この方程式の判別式をDとおくと，$D = (a+2)^2 - 4\cdot\left(1 - \dfrac{a^2}{4}\right) > 0$

∴ $2a(a+2) > 0$ ∴ $\underline{a < -2,\ 0 < a}$ //

(3) 点P，Q，R，Sの x 座標をそれぞれ，P_x，Q_x，R_x，S_x とおくと，



$PQ = RS \iff P_xQ_x = R_xS_x$

∴ $3|a| = \dfrac{a+2+\sqrt{D}}{2} - \dfrac{a+2-\sqrt{D}}{2}$

$= \sqrt{2a^2+4a}$ ……(*)

∴ 両辺2乗して，$9a^2 = 2a^2 + 4a$

∴ $a(7a-4) = 0$ $a \neq 0$ より $\underline{a = \dfrac{4}{7}}$ //

逆にこのとき，(*)の式をみたす．