0002216363877999

宮城教育大学

2016年 教育学部（中等数学） 第2問

数理
石井K

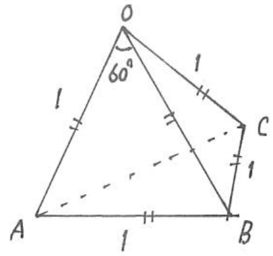
$\boxed{2}$ 辺の長さが1の正四面体OABCに対して，平面OAB上の点Pが

$$2\overrightarrow{OP}-3\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$$

を満たしている．点Pから平面OBCに垂線を下ろし，その垂線と平面OBCの交点をQとする．直線PQと平面ABCの交点をRとする．

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\quad \vec{b}=\overrightarrow{OB},\quad \vec{c}=\overrightarrow{OC}$$

とおくとき，次の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{PQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．
(3) $\overrightarrow{PR}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(1) $2\overrightarrow{OP}-3(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}$ //

(2) Qは平面OBC上の点より，$\overrightarrow{OQ}=s\vec{b}+t\vec{c}$ (s,tは実数)と表せる．

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$=-\frac{3}{2}\vec{a}+(s-\frac{1}{2})\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{PQ}\perp$平面OBCより，$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{b}=0$ かつ $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{c}=0$

$\therefore\ |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ より

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{4}+s-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \qquad \therefore\ s+\frac{1}{2}t=\frac{5}{4}\ \cdots①$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{c}=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}+t \qquad \therefore\ \frac{1}{2}s+t=1\ \cdots②$

①，②より，$s=1$，$t=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{PQ}=-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$ //

(3) Rは平面ABC上の点より，$\overrightarrow{OR}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$，$p+q+r=1$ と表せる．

$\overrightarrow{PR}=(p-\frac{3}{2})\vec{a}+(q-\frac{1}{2})\vec{b}+r\vec{c}$ であり，P，Q，Rは同一直線上にあるので

$\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}$ となる実数kが存在する．よって，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は一次独立より

$$\begin{cases} p-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}k \\ q-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}k \\ r=\frac{1}{2}k \end{cases}$$

これと，$p+q+r=1$より，$k=2$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{PR}=2\overrightarrow{PQ}=-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$ //