0002209630977999

滋賀大学

2016年 文系 第4問　1枚目/2枚

数理 石井K

4 関数 $f(x)=x^3-5x^2+6x+1$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $f(x)>0$ が成り立つことを証明せよ．

(2) a を 0 以上の定数とし，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=a+1$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．a を変化させたとき，$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(1) $f'(x)=3x^2-10x+6$

$f'(x)=0$ となるのは．$x=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

$\alpha=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$，$\beta=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ とおくと，$0<\alpha<\beta$ であるから増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x=\beta$ は $f'(x)=0$ の解より．$3\beta^2-10\beta+6=0$　$\therefore\ \beta^2-\dfrac{10}{3}\beta+2=0$

$$\begin{aligned}
f(\beta)&=\beta^3-5\beta^2+6\beta+1\\
&=\left(\beta^2-\frac{10}{3}\beta+2\right)\left(\beta-\frac{5}{3}\right)-\frac{14}{9}\beta+\frac{13}{3}\\
&=-\frac{14}{9}\cdot\frac{5+\sqrt{7}}{3}+\frac{13}{3}\\
&=\frac{47-14\sqrt{7}}{27}\\
&=\frac{\sqrt{2209}-\sqrt{1372}}{27}\\
&>0
\end{aligned}$$

$\therefore \begin{cases} f(\beta)>0 \\ f(0)>0 \end{cases}$ となり．$x \geqq 0$ のとき．$f(x)>0$ が成り立つ ■

(2) (1)より．$S(a)=\displaystyle\int_a^{a+1} x^3-5x^2+6x+1\,dx$

$$=\int_0^{a+1} x^3-5x^2+6x+1\,dx-\int_0^{a} x^3-5x^2+6x+1\,dx$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ S'(a)&=(a+1)^3-5(a+1)^2+6(a+1)+1-(a^3-5a^2+6a+1)\\
&=3a^2-7a+2\\
&=(3a-1)(a-2)
\end{aligned}$$

2枚目へつづく

2016年 文系 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

4 関数 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $f(x) > 0$ が成り立つことを証明せよ．

(2) a を 0 以上の定数とし，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = a + 1$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．a を変化させたとき，$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(2) のつづき．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$S(a)$	$\frac{31}{12}$	$\nearrow$	$\frac{313}{108}$	$\searrow$	$\frac{7}{12}$	$\nearrow$

$$S(0) = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{3} + 3 + 1 = \frac{31}{12}$$

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} = \frac{64}{81} - \frac{320}{81} + \frac{16}{3} + \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{324} - \frac{5}{81} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{313}{108}$$

$$S(2) = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + x\right]_2^3 = \frac{81}{4} - 45 + 27 + 3 - \left(4 - \frac{40}{3} + 12 + 2\right)$$

$$= \frac{7}{12}$$

∴ $S(a)$ の最小値は $\frac{7}{12}$ ($a = 2$ のとき) //