0001978271208999

金沢大学

2015年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ a, bは定数で，$ab>0$とする．放物線$C_1: y=ax^2+b$上の点$\mathrm{P}(t,\ at^2+b)$における接線をℓとし，放物線$C_2: y=ax^2$とℓで囲まれた図形の面積をSとする．次の問いに答えよ．

(1) ℓの方程式を求めよ．

(2) ℓとC_2のすべての交点のx座標を求めよ．

(3) 点PがC_1上を動くとき，Sは点Pの位置によらず一定であることを示せ．

(1) C_1において，$y'=2ax$より

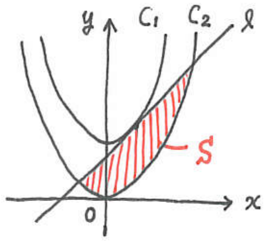
$\ell: y=2at(x-t)+at^2+b$ $\quad\therefore\ \underline{\ell: y=2atx-at^2+b}$ //

(2) $ax^2-(2atx-at^2+b)=0$ を解くと，

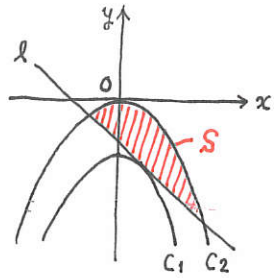
$a(x-t)^2=b$

$ab>0$ より $a\neq 0$ なので，$(x-t)^2=\dfrac{b}{a}$

$ab>0$ より，$\dfrac{b}{a}>0$ なので，$x-t=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ $\quad\therefore\ \underline{x=t\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$ //



(i) $a>0$, $b>0$のとき.



(ii) $a<0$, $b<0$のとき.

(3) 右図のように，2つの場合に分けて考える．

(i) $a>0$, $b>0$のとき．

$$S=\int_\alpha^\beta 2atx-at^2+b-ax^2\,dx \quad \left(\text{ただし，}\alpha=t-\sqrt{\frac{b}{a}},\ \beta=t+\sqrt{\frac{b}{a}}\text{ とおいた}\right)$$

$$=-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-a\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{a}{6}\cdot\left\{t+\sqrt{\frac{b}{a}}-\left(t-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right\}^3$$

$$=\frac{4}{3}a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(ii) $a<0$, $b<0$のとき．

$$S=\int_\alpha^\beta ax^2-(2atx-at^2+b)\,dx$$

$$=a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\frac{4}{3}a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\because \text{(i)と同様に計算した})$$

$\therefore$ (i), (ii) より，$S=\dfrac{4}{3}|a|\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ これは，tの値によらず一定．

すなわち，Sは点Pの位置によらず一定 ▨