

2014年医学部第4問

4 行列 $A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f について考える. 点 P_0 の座標を $(1, 0)$ とし, n を正の整数とすると, f によって点 P_{n-1} が移される点を P_n とする. また, $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OQ_n}$ となる点 Q_n の座標を (x_n, y_n) とし, $n \rightarrow \infty$ のときに x_n, y_n がともに収束する場合の点 Q_n の極限值 $Q \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$ を求めよう.

(1) $r = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$ のとき, $A^3 = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}} \begin{pmatrix} \text{エ} & \text{オ} \\ \text{オ} & \text{エ} \end{pmatrix}$ であり, P_7 の座標は $\left(\frac{\text{カ}}{\text{キクケ}}, \frac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{キクケ}} \right)$ である.

(2) $E - A$ が逆行列をもたない r, θ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) の条件は, $r = \text{サ}$ かつ $\theta = \text{シ}$ である. ただし, E は単位行列とする.

$E - A$ が逆行列をもつとき, n を2以上の整数とすると

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = E - A^n \text{ より}$$

$$E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = (E - A)^{-1}(E - A^n)$$

また, $(E - A)^{-1} = \frac{1}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} \begin{pmatrix} 1 - r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & 1 - r \cos \theta \end{pmatrix}$ であるから

$$(E - A)^{-1}(E - A^n) = \frac{1}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} T \text{ とすると}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 - r \cos \theta - r^n \text{ス} + r^{n+1} \text{セ} & -r \sin \theta + r^n \text{ソ} - r^{n+1} \text{タ} \\ r \sin \theta - r^n \text{ソ} + r^{n+1} \text{タ} & 1 - r \cos \theta - r^n \text{ス} + r^{n+1} \text{セ} \end{pmatrix}$$

である. ただし, $\text{ス}, \text{セ}, \text{ソ}, \text{タ}$ には, 次の①~⑥の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと. なお, 同じ選択肢を選んでもよいものとする.

① $\sin n\theta$ ② $\cos n\theta$ ③ $\sin(n-1)\theta$ ④ $\cos(n-1)\theta$ ⑤ $\sin(n+1)\theta$ ⑥ $\cos(n+1)\theta$

$0 \leq r < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ はともに収束し, さらに $\theta = \frac{\pi}{3}$ とすると,

$$Q = \left(\frac{\text{チ} - r}{\text{ツ} - 2r + \text{テ} r^2}, \frac{\sqrt{\text{ト}} r}{\text{ツ} - 2r + \text{テ} r^2} \right)$$

である.