

2014年工学部第4問

4  $\alpha$  は実数とする. 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  について, 次の問いに答えよ.

- (1)  $A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  と表すとき,  $r, \theta$  の値を求めよ. ただし,  $r > 0, 0 < \theta < \pi$  とする.
- (2)  $B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) となることを数学的帰納法を用いて示せ.
- (3)  $A_n = r_n \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を  $(A_n)^n = A$  により定める. ただし,  $r_n > 0, 0 < \theta_n < \frac{\pi}{n}$  とする. このとき,  $r_n, \theta_n$  を  $n$  の式で表せ.
- (4) (3) で定めた  $A_n$  を用いて行列  $T_n$  を  $T_n = nA_n$  により定める. 点  $O$  を原点とする座標平面上において,  $T_n$  の表す 1 次変換によって点  $(1, 0)$  が移される点を  $P_n$  とするとき,  $\triangle OP_n P_{n+1}$  の面積  $S_n$  を  $n$  の式で表せ. また, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ.