

2012年工学部第1問

1 座標平面上の点を，原点のまわりに角  $\theta$  だけ回転移動させる一次変換を表す 2 行 2 列の行列を  $A$  とする．以下の問いに答えよ．

- (1) 座標平面上の点  $P_0(a, b)$  が  $A$  によって変換された点を点  $P_1$  とする．2 点  $P_0, P_1$  の間の長さを求めよ．
- (2)  $A^n = E$  となる条件を示せ．ただし， $n$  は 2 以上の整数， $0 \leq \theta \leq \pi$ ， $E$  は単位行列とする．
- (3) 座標平面上の点  $P_0(a, b)$  が  $A$  によって  $l$  回変換された点を点  $P_l$  とする．点  $P_0$  が  $A$  によって  $n$  回変換されると，原点の周りを 1 周して元の点  $P_0$  に戻るとする． $n$  個の点  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  で囲まれた  $n$  角形の面積  $S_n$  を求めよ．また， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  を用いて， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ．
- (4) 座標平面上の点を，原点からの方向を変えずに距離を  $k$  倍する一次変換を表す 2 行 2 列の行列を  $B$  とする．座標平面上の点  $Q_{i-1}$  が一次変換  $AB$  によって点  $Q_i$  に移るとする．点  $Q_0$  を  $(c_0, d_0)$  とするとき，2 点  $Q_{i-1}, Q_i$  の間の長さ  $m_i$  を  $k, \theta, c_0, d_0$  を用いて表せ．