

2012年 第4問

4 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n について、

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

となることを数学的帰納法で示せ。

(2) $\theta = 20^\circ$ のとき、 $A^m = E$ となる最小の自然数 m を求めよ。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(3) $\theta = 20^\circ$ のとき、(2) で求められた m を用いて

$$A + A^2 + \cdots + A^m$$

を求めよ。