2014年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ αは実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$について，次の問いに答えよ．

(1) $A=r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$と表すとき，$r$，$\theta$の値を求めよ．ただし，$r>0$，$0<\theta<\pi$とする．

(2) $B^n=\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$となることを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) $A_n=r_n\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を$(A_n)^n=A$により定める．ただし，$r_n>0$，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{n}$とする．このとき，$r_n$，$\theta_n$を$n$の式で表せ．

(4) (3)で定めたA_nを用いて行列T_nを$T_n=nA_n$により定める．点Oを原点とする座標平面上において，T_nの表す1次変換によって点$(1,\ 0)$が移される点をP_nとするとき，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$の面積$S_n$を$n$の式で表せ．また，極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ．