

2010年第3問

3 数列  $\{a(n)\}$  を  $a(1) = 1$  および  $n \geq 1$  に対して

$$\begin{cases} a(2n) = 3a(n) \\ a(2n+1) = 2a(n) + a(n+1) \end{cases}$$

で定義する。以下の問いに答えよ。

(1)  $a(2)$ ,  $a(3)$ ,  $a(4)$ ,  $a(5)$  を求めよ。

次に数列  $\{b(n)\}$  を  $b(1) = a(1)$  および  $n \geq 2$  に対して

$$b(n) = a(n) - a(n-1)$$

で定義する。

(2)  $b(2)$ ,  $b(3)$ ,  $b(4)$ ,  $b(5)$  を求めよ。

(3) すべての自然数  $n$  に対して、

$$\begin{cases} b(2n) = 2b(n) \\ b(2n+1) = b(n+1) \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ。

(4) 自然数  $k$  に対して  $b(2^k)$  および  $b(2^k + 1)$  を計算せよ。

(5) 自然数  $k$  に対して  $a(2^k - 1)$  を計算せよ。