2016年第4問　　1枚目/2枚

4 xy 平面上の2つの曲線

$C_1 : y = \log x + 2 \quad (x > 0)$

$C_2 : y = -\log x \quad (x > 0)$

を考える．正の実数 p, q について，点 $\mathrm{P}(p,\ \log p + 2)$ における C_1 の接線を ℓ_1 とし，点 $\mathrm{Q}(q,\ -\log q)$ における C_2 の接線を ℓ_2 とする．また，ℓ_1 と ℓ_2 は垂直であるとする．ただし，対数は自然対数とする．次の問いに答えよ．

(1) q を p を用いて表せ．

(2) ℓ_2 の方程式を p を用いて表せ．

(3) ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする．$\angle \mathrm{RPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとき，線分 PQ，曲線 C_1 および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $f(x) = \log x + 2 \ (x>0)$, $g(x) = -\log x \ (x>0)$ とおくと，

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x}$

$\ell_1 \perp \ell_2 \iff f'(p)\cdot g'(q) = -1$

$\iff \dfrac{1}{p}\cdot\left(-\dfrac{1}{q}\right) = -1$

$\iff pq = 1$

$\iff \underline{q = \dfrac{1}{p}}$ //

(2) $\ell_2 : y = -\dfrac{1}{q}(x-q) - \log q$

(1)の結果より，

$\ell_2 : y = -px + 1 - \log\dfrac{1}{p}$

$\therefore \underline{\ell_2 : y = -px + 1 + \log p}$ //

(3) $\ell_1 \perp \ell_2$ より $\angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ$

$\ell_1 : y = \dfrac{1}{p}(x-p) + \log p + 2$

$\therefore \ell_1 : y = \dfrac{1}{p}x + 1 + \log p$

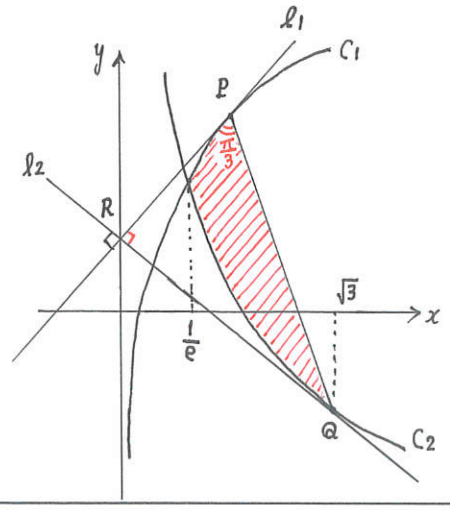
$\therefore \mathrm{R}(0,\ 1+\log p)$

$\mathrm{PR} = \sqrt{p^2+1}$, $\mathrm{RQ} = \sqrt{q^2+1}$

$\mathrm{RQ} = \sqrt{3}\,\mathrm{PR}$ より，$\mathrm{RQ}^2 = 3\mathrm{PR}^2$

$\therefore \dfrac{1}{p^2} + 1 = 3(p^2+1) \iff 3p^4 + 2p^2 - 1 = 0$

$(3p^2-1)(p^2+1) = 0 \qquad p>0$ より $p = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



2016年 第4問

2枚目／2枚

数理 石井K

4 xy 平面上の2つの曲線

$$C_1 : y = \log x + 2 \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = -\log x \quad (x > 0)$$

を考える．正の実数 p，q について，点 $\mathrm{P}(p,\ \log p + 2)$ における C_1 の接線を ℓ_1 とし，点 $\mathrm{Q}(q,\ -\log q)$ における C_2 の接線を ℓ_2 とする．また，ℓ_1 と ℓ_2 は垂直であるとする．ただし，対数は自然対数とする．次の問いに答えよ．

(1) q を p を用いて表せ．

(2) ℓ_2 の方程式を p を用いて表せ．

(3) ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする．$\angle\mathrm{RPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとき，線分 PQ，曲線 C_1 および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) のつづき

$\log x + 2 = -\log x$ を解いて，C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\frac{1}{e}$

$\frac{1}{e} < p < q \quad (\because\ p = \frac{1}{\sqrt{3}},\ q = \sqrt{3})$ であるから，前ページの図より

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \log x + 2 - (-\log x)\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \underbrace{-\sqrt{3}x + 3 - \frac{1}{2}\log 3}_{\text{直線PQの式}} - (-\log x)\,dx$$

$$= 2\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \log x + 1\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \log x - \sqrt{3}x + 3 - \frac{1}{2}\log 3\,dx$$

$$= 2\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (x)'\log x\,dx + 2\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} (x)'\log x\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} -\sqrt{3}x + 3 - \frac{1}{2}\log 3\,dx$$

$$= 2\Big[x\log x\Big]_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \underbrace{- 2\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx + 2\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx}_{=0} + \Big[x\log x\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} dx + \Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \left(3 - \frac{1}{2}\log 3\right)x\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{e}\right) + \sqrt{3}\log\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(3 - \frac{1}{2}\log 3\right)\cdot\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \left(3 - \frac{1}{2}\log 3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\log 3 + \frac{2}{e} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\log 3 - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3 + \frac{\sqrt{3}}{6} - \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\log 3$$

$$= \underline{\frac{2}{e}}\,/\!/$$