奈良女子大学

2016年 理学部 第3問

3 nを正の整数とする．1から$6n$までの番号がつけられた$6n$枚のカードから2枚を同時に選び，選んだ2枚の番号の積をXとする．Xが3の倍数となる確率をP_n，Xが6の倍数となる確率をQ_nとする．次の問いに答えよ．

(1) P_1，Q_1をそれぞれ求めよ．

(2) P_nをnを用いて表せ．

(3) Q_nをnを用いて表せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} P_n$，$\lim_{n\to\infty} Q_n$をそれぞれ求めよ．

(1) $P_1 = 1 -$ (Xが3の倍数とならない確率) …(*)

3の倍数でないカードは $n=1$ のとき4枚あるから，$P_1 = 1 - \dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = 1 - \dfrac{6}{15} = \dfrac{3}{5}$

(Xが6の倍数とならない確率) = (Xが2の倍数とならない確率) + (Xが3の倍数とならない確率)

− (Xが2の倍数でも3の倍数でもない確率) …(**)

$$= \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} + \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} - \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}$$

$$= \frac{3}{15} + \frac{6}{15} - \frac{1}{15}$$

$$= \frac{8}{15}$$

$\therefore Q_1 = 1 - \dfrac{8}{15} = \dfrac{7}{15}$ 　　以上より，$P_1 = \dfrac{3}{5}$，$Q_1 = \dfrac{7}{15}$ //

(2) (*)のように考えると，

$$P_n = 1 - \frac{{}_{4n}C_2}{{}_{6n}C_2} = 1 - \frac{2n(4n-1)}{3n(6n-1)} = \frac{10n-1}{3(6n-1)} \text{ //}$$

(3) (**)の右辺は次のようになる．

$$(\text{右辺}) = \frac{{}_{3n}C_2}{{}_{6n}C_2} + \frac{{}_{4n}C_2}{{}_{6n}C_2} - \frac{{}_{2n}C_2}{{}_{6n}C_2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3n(3n-1)}{3n(6n-1)} + \frac{2n(4n-1)}{3n(6n-1)} - \frac{n(2n-1)}{3n(6n-1)} = \frac{21n-5}{6(6n-1)}$$

$$\therefore Q_n = 1 - \frac{21n-5}{6(6n-1)} = \frac{15n-1}{6(6n-1)} \text{ //}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10 - \frac{1}{n}}{3\left(6 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{5}{9} \text{ //}$$

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{15 - \frac{1}{n}}{6\left(6 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{5}{12} \text{ //}$$