0000131458689999

金沢大学

2012年 理系 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

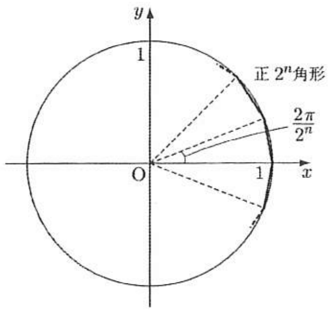
$\boxed{1}$ 半径1の円に内接する正 2^n 角形 $(n \geqq 2)$ の面積を S_n，周の長さを L_n とする．次の問いに答えよ．

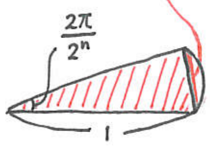
(1) $S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，　$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ．

(2) $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，　$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ．





面積 $\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{2\pi}{2^n}$

この三角形が 2^n コ ある.

(1) $S_n = \dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\dfrac{2\pi}{2^n}\cdot 2^n$

$= 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$

右図の辺の長さ l_n は余弦定理より，

$l_n^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cdot\cos\dfrac{2\pi}{2^n}$

$= 4\cdot\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}$

$= 4\sin^2\dfrac{\pi}{2^n}$

$\therefore\ l_n = 2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$　　$\therefore\ L_n = 2^n\cdot l_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ ▨

(2) $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \dfrac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}} = \dfrac{2^{n-1}\cdot2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$

$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}} = \dfrac{2^{n-1}\cdot2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ ▨

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{\frac{\pi}{2^{n-1}}}\times\pi = \underline{\pi}$//　　$\left(\because \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot\cos\frac{\pi}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3}{S_4}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{S_{n+1}}$　$(\because$ (2) より$)$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} S_2\cdot\frac{1}{S_{n+1}}$

$\displaystyle = 2\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}}$　　$\displaystyle = \frac{1}{\pi}\ (\because \lim_{n\to\infty} S_n = \pi)$

$= \underline{\dfrac{2}{\pi}}$//

2枚目につづく

金沢大学

2012年 理系 第1問

2枚目／2枚

数理 石井K

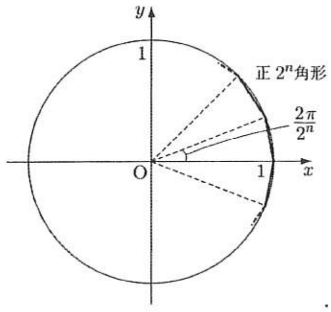
1 半径1の円に内接する正 2^n 角形 $(n \geqq 2)$ の面積を S_n，周の長さを L_n とする．次の問いに答えよ．

(1) $S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，　$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ．

(2) $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，　$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ．



(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n \frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{L_n} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot\cos\frac{\pi}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}$　（∵ (2) より）

$= 2\cdot\dfrac{2}{\pi}$　（∵ (3) より）

$= \dfrac{4}{\pi}$ //