東京女子大学

2013年 現代教養 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2$，$a_{n+1} = a_n + (n+2)2^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定めるとき，以下の設問に答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．
(2) $\sum_{k=1}^{n}(k+2)2^k$ を求めよ．
(3) 一般項 a_n を求めよ．

(1) $\underline{a_2 = a_1 + 3\cdot 2^1 = 8}$ // $\underline{a_3 = a_2 + 4\cdot 2^2 = 24}$ // $\underline{a_4 = a_3 + 5\cdot 2^3 = 64}$ //

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)2^k$ とおくと．

$$S_n = 3\cdot 2^1 + 4\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + 6\cdot 2^4 + \cdots + (n+2)\cdot 2^n$$
$$-)\ \ 2S_n = 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 + \cdots + (n+1)\cdot 2^n + (n+2)2^{n+1}$$

$$-S_n = 6 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n) - (n+2)2^{n+1}$$

$$\therefore S_n = -6 - \frac{4(1-2^{n-1})}{1-2} + (n+2)2^{n+1}$$

$$= \underline{(n+1)2^{n+1} - 2}\ //$$

(3) $a_{n+1} - a_n = (n+2)2^n$ と (2) より．

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k\right) = (n+1)2^{n+1} - 2 \quad \cdots (*)$$

(*) の左辺は．$a_{n+1} - a_1$ となるので

$$a_{n+1} - a_1 = (n+1)2^{n+1} - 2$$

$$\therefore a_{n+1} = (n+1)2^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\therefore a_n = n\cdot 2^n \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

これは $n=1$ のときも成り立つので，$\underline{a_n = n\cdot 2^n}$ //