奈良県立医科大学

2014 年 医学部 第 8 問

$\boxed{8}$ 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+2\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+n\cos\frac{n\pi}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{k\pi}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\pi\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}$$

$$= \int_0^1 x\pi\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$= \pi\int_0^1 x\left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right)'dx$$

$$= \pi\left[x\cdot\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1 - \pi\int_0^1\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$= \pi\cdot\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - \pi\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$= 2-2\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$= 2-2\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

$$= \underline{2-\frac{4}{\pi}}\ //$$