奈良県立医科大学

2011 年 医学部 第 1 問

$\boxed{1}$ 0 以上の任意の整数 i に対して，x の i 次式 $g_i(x)$ を $i=0$ のとき $g_0(x)=1$，$i \geqq 1$ のとき $g_i(x)=\dfrac{x(x+1)\cdots(x+i-1)}{i!}$ と定義する．

(1) $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$（但し $a_n \neq 0$）を x に関する実数係数の n（$\geqq 0$）次式とする．このとき，等式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i\,g_i(x)$ が任意の実数 x について成り立つような実数 c_i（$0 \leqq i \leqq n$，但し $c_n \neq 0$）が一意的に存在することを証明せよ．

(2) (1) において，$n>0$ のとき等式 $f(x)-f(x-1)=\sum_{i=1}^{n} c_i\,g_{i-1}(x)$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $F(x)$（$\neq 0$）を x に関する実数係数の n（$\geqq 0$）次式とし，任意の整数 a に対して $F(a)$ が整数であると仮定する．このとき，等式 $F(x)=\sum_{i=0}^{n} d_i\,g_i(x)$ が任意の実数 x について成り立つような整数 d_i（$0 \leqq i \leqq n$，但し $d_n \neq 0$）が一意的に存在することを証明せよ．