

2014年 現代教養 第3問


 数理  
石井K

3  $a, b$  は 1 でない 正の実数とする.  $x$  の 2 次方程式

$$x^2 - (\log_a b)x + 2\log_b a = 0$$

が相異なる 2 つの 正の実数解を持つような点  $(a, b)$  の動く領域を図示せよ.

解と係数の関係より.  $\alpha + \beta = \log_a b > 0$  かつ  $\alpha\beta = 2\log_b a > 0$

$$\Leftrightarrow \log_a b > 0 \text{ かつ } \frac{\log_a a}{\log_a b} > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_a b > 0 \dots \textcircled{1}$$

また, 相異なる 2 つの実数解をもつので, 判別式を  $\Delta$  とおくと.

$$\Delta = (\log_a b)^2 - 4 \cdot 2\log_b a > 0$$

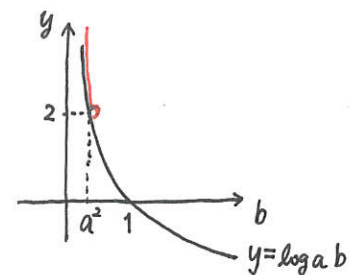
$$\therefore (\log_a b)^2 - 8 \cdot \frac{1}{\log_a b} > 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より, 両辺に } \log_a b (> 0) \text{ をかけると, } (\log_a b)^3 > 8$$

$$\therefore \log_a b > 2 \dots \textcircled{2}$$

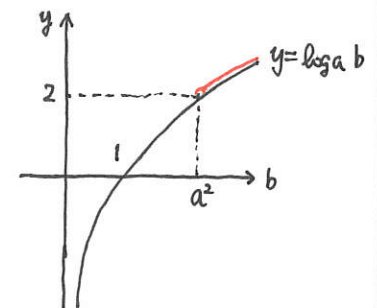
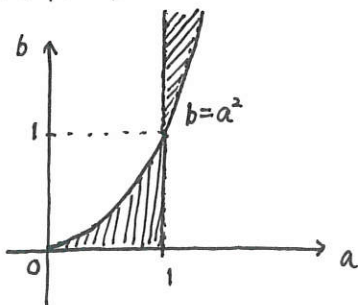
(i)  $0 < a < 1$  のとき.

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$  より, 右の図のように,  $0 < b < a^2$  となる.



(ii)  $a > 1$  のとき.

右の図より,  $b > a^2$  となる.



$\therefore$  上の図の斜線部分 (ただし境界線は含まない)