

2012年 医学部 第4問

4 整数 m が与えられたとき、 x に関する整数係数の2つの整式 $f(x)$ 、 $g(x)$ が関係式

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$$

を満たすとは、等式 $f(x) - g(x) = mh(x)$ を満たすような整数係数の整式 $h(x)$ が存在することである。

- (1) $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $F(x)$ 、 $G(x)$ を整数係数の整式とする。もし、ある整数 m について関係式 $f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$ 、かつ $F(x) \equiv G(x) \pmod{m}$ が満たされるならば、関係式 $f(x) + F(x) \equiv g(x) + G(x) \pmod{m}$ 、かつ $f(x)F(x) \equiv g(x)G(x) \pmod{m}$ が満たされることを証明せよ。
- (2) 正整数 $p (> 1)$ を素数とする。 p より小さい任意の正整数 i に対して二項係数 ${}_p C_i$ は p の倍数であることを証明せよ。
- (3) 正整数 $p (> 1)$ を素数とする。任意の正整数 n について、関係式

$$(1+x)^{p^n} \equiv 1+x^{p^n} \pmod{p}$$

が満たされることを証明せよ。

- (4) 正整数 $p (> 1)$ を素数とし、 n を2以上の正整数とする。 $n-1$ 個の二項係数 ${}_n C_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) がすべて p の倍数であるための必要十分条件は、整数 n が素数 p の正べきである（すなわち、適当な正整数 k を用いて $n = p^k$ と表せる）ことを証明せよ。