0002103906987999

山形大学

2015年 工学部 第2問

数理 石井K

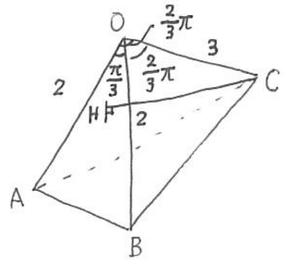
$\boxed{2}$ 四面体OABCは，$\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$，$\angle \mathrm{AOC} = \angle \mathrm{BOC} = \dfrac{2}{3}\pi$，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 2$，$\mathrm{OC} = 3$ を満たす．点Cから平面OABに下ろした垂線をCHとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\triangle$OABの面積を求めよ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$ を示せ．

(4) 四面体OABCの体積を求めよ．



(1) $\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin\frac{\pi}{3} = \underline{\sqrt{3}}$ //

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = \underline{2}$ //

$\vec{b}\cdot\vec{c} = 2\cdot 3\cdot\cos\frac{2}{3}\pi = \underline{-3}$ //

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 2\cdot 3\cdot\cos\frac{2}{3}\pi = \underline{-3}$ //

(3) 点Hは平面OAB上の点より．

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\vec{c} + s\vec{a} + t\vec{b}$ と表せる

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp$ 平面OABより．$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b} = 0$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a} = s|\vec{a}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$

$= 4s + 2t + 3$

$\therefore 4s + 2t + 3 = 0 \cdots ①$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b} = s\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \vec{b}\cdot\vec{c}$

$= 2s + 4t + 3$

$\therefore 2s + 4t + 3 = 0 \cdots ②$

①,②より．$6s + 3 = 0$ $\therefore s = -\frac{1}{2}$，$t = -\frac{1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$ ■

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

$= 1 + 1 + 9 + 1 - 3 - 3$

$= 6$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \sqrt{6}$

(四面体OABC)

$= \frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$

$= \underline{\sqrt{2}}$ //