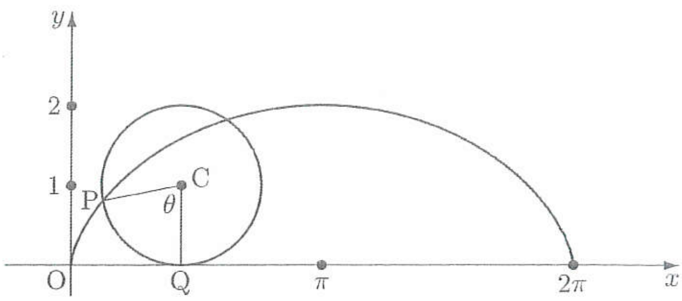
奈良教育大学

2015年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 1つの円が定直線に接しながらすべることなく回転するとき，円周上の定点Pのえがく軌跡をサイクロイドという.



上の図を参考に，以下の設問に答えよ.

(1) 円Cを半径1の円，定直線を x 軸とし，円Cが x 軸に原点Oで接するとき，定点PがOの位置にあったとする. 円Cが角 θ だけ回転したとき，円Cの中心の座標を求めよ.

(2) 円Cが角 θ だけ回転したときの点Pの位置を $(x,\ y)$ とするとき，x, y をそれぞれ θ を使って表せ.

(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，(2)で与えられる点Pの軌跡（サイクロイド）と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

(1) 線分OQの長さは弧PQの長さに等しいから.

$OQ = \theta$ 　よって，$C(\theta, 1)$

(2) $PC = 1$ より $(x-\theta)^2 + (y-1)^2 = 1$ $\cdots$ ①

$\overrightarrow{CP} = (x-\theta,\ y-1)$ ，$\overrightarrow{CQ} = (0, -1)$

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}}{|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CQ}|} = 1-y$ 　$\therefore\ y = 1-\cos\theta$ $\cdots$ ②

②を①に代入して，$(x-\theta)^2 = \sin^2\theta$ 　$\therefore\ x-\theta = \pm\sin\theta$

$0<x<\pi$ のとき $x-\theta<0$

$\pi<x<2\pi$ のとき $x-\theta>0$

より，$x-\theta = -\sin\theta$

$\therefore\ \underline{x = \theta-\sin\theta,\ y = 1-\cos\theta}$ //

(3)

$S = \int_0^{2\pi} y\,dx$

$= \int_0^{2\pi} y\cdot\dfrac{dx}{d\theta}\cdot d\theta$

$= \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\cdot(1-\cos\theta)\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} 1-2\cos\theta+\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$= \left[\dfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \dfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$

$= \underline{3\pi}$ //