# 奈良教育大学

2016年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ．

(1) 次の和を求めよ．

$$S = 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \cdots + 2nx^{n-1}$$

(2) $0 < a < 1$のとき，$\log_3 a$と$\log_a 3$の大小を比較せよ．

(1) $S = 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \cdots + 2nx^{n-1}$ $\cdots$①

$xS = \quad 2x + 4x^2 + 6x^3 + \cdots + (2n-2)x^{n-1} + 2nx^n$ $\cdots$②

①−②より，

$(1-x)S = \underbrace{2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^{n-1}}_{\text{初項}2\text{，公比}x\text{の等比数列の和}} - 2nx^n$

(i) $x \neq 1$のとき

$$(1-x)S = \frac{2(1-x^n)}{1-x} - 2nx^n$$

$$= \frac{2\{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\}}{1-x}$$

$$\therefore\ S = \frac{2\{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\}}{(1-x)^2}$$

(ii) $x = 1$のとき

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k$$

$$= n(n+1)$$

(i)，(ii)より，

$$S = \begin{cases} \dfrac{2\{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\}}{(1-x)^2} & (x \neq 1\text{のとき}) \\ n(n+1) & (x = 1\text{のとき}) \end{cases}$$ //

(2) $0 < a < 1$のとき．$\log_3 a - \log_a 3 = \dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} 3} - \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} a} = \dfrac{(\log_{10} a + \log_{10} 3)(\log_{10} a - \log_{10} 3)}{\underbrace{(\log_{10} 3)}_{>0} \cdot \underbrace{(\log_{10} a)}_{<0}}$

調べる　<0

$\log_{10} a < 0$，$\log_{10} 3 > 0$　よって，$\log_3 a - \log_a 3$の符号は　$\log_{10} a + \log_{10} 3\ (= \log_{10} 3a)$の符号に等しい

$$\begin{cases} \log_3 a < \log_a 3 & \left(0 < a < \dfrac{1}{3}\text{のとき}\right) \\ \log_3 a = \log_a 3 & \left(a = \dfrac{1}{3}\text{のとき}\right) \\ \log_3 a > \log_a 3 & \left(\dfrac{1}{3} < a < 1\text{のとき}\right) \end{cases}$$ //