

2016年 国際文理 (環境科学) 第4問

4 z を複素数, i を虚数単位とするとき, 以下の間に答えなさい。

(1) 方程式

$$(z+1)^2 = 1 - \sqrt{3}i$$

の解を求めなさい。

(2) 方程式

$$z^2 - z - \frac{3}{4} + \sqrt{3}i = 0$$

の解を求めなさい。

(1) $z+1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r > 0$) とおくと。

$$(z+1)^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \quad (\text{ド・モアヴルの定理より})$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{5}{3}\pi + i\sin \frac{5}{3}\pi)$$

よって, $r^2 = 2$ から $2\theta = \frac{5}{3}\pi + 2n\pi$ (n は整数)

$$r > 0 \text{ より, } r = \sqrt{2}, \theta = \frac{5}{6}\pi + n\pi$$

$$n \text{ が偶数のとき, } \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$n \text{ が奇数のとき, } \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

以上より, $z+1 = \sqrt{2}(\mp\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i)$ (複号同順)

$$\therefore z = -1 \mp \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad (\text{複号同順})$$

(2) $(z - \frac{1}{2})^2 = 1 - \sqrt{3}i$

(1) と同様の手順により

$$z - \frac{1}{2} = \sqrt{2}(\mp\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i)$$

よって, $z = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (複号同順)

$$\begin{aligned} & \nearrow z = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ & \text{と書いてもよい} \end{aligned}$$