岡山県立大学

2012年 第3問

数理
石井K

$\boxed{3}$ aを実数とし，$f(x)=2x^3-3(a^2+a)x^2+6a^3x$とおく．次の問いに答えよ．

(1) 曲線$y=f(x)$上の点A$(2a,\ f(2a))$における接線が，点Aとは異なる点Bにおいて曲線$y=f(x)$と交わるとき，aが満たす条件を求めよ．また，そのときの点Bのx座標を求めよ．

(2) $0<a<1$のとき，$f(x)$の極大値と極小値の差を$g(a)$とおく．$g(a)$の最大値と，そのときのaの値を求めよ．

(1) 点Aにおける接線を $y=px+q$ とおくと．

$2x^3-3(a^2+a)x^2+6a^3x-(px+q)=0$ において 解と係数の関係から．

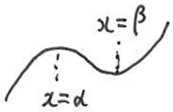
$2a+2a+\alpha=\frac{3}{2}(a^2+a)$ （Bのx座標をαとおいた）

$\therefore\ \alpha=\frac{3}{2}a^2-\frac{5}{2}a$ これが$2a$と異なればよいので，

$\frac{3}{2}a^2-\frac{5}{2}a=2a$ を解くと，$a=0,3$ $\therefore$ 条件は $a\neq 0,3$ //

このときBのx座標は $\frac{3}{2}a^2-\frac{5}{2}a$ //

(2) 極大値，極小値をとるxをそれぞれ$\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$とおくと，



$g(a)=f(\alpha)-f(\beta)$

$=\left[f(x)\right]_{\beta}^{\alpha}$

$=-\int_{\alpha}^{\beta}f'(x)\,dx$

$=-\int_{\alpha}^{\beta}6(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=(\beta-\alpha)^3$

ここで，$f'(x)=6x^2-6(a^2+a)x+6a^3$

より $f'(x)=0$ は $x^2-(a^2+a)x+a^3=0$ となる

$\therefore\ x=\dfrac{a^2+a\pm\sqrt{(a^2+a)^2-4a^3}}{2}=\dfrac{a^2+a\pm\sqrt{(a^2-a)^2}}{2}$

$0<a<1$ より $a^2-a<0$ $\therefore\ x=\dfrac{a^2+a\pm(a-a^2)}{2}$

$=a,\ a^2$

$\alpha<\beta$ より $\alpha=a^2,\ \beta=a$

$\therefore\ \beta-\alpha=a-a^2$

$\therefore\ g(a)=\left\{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}^3$

$\therefore\ g(a)$は $a=\frac{1}{2}$ のとき //

最大値 $\frac{1}{64}$ をとる //