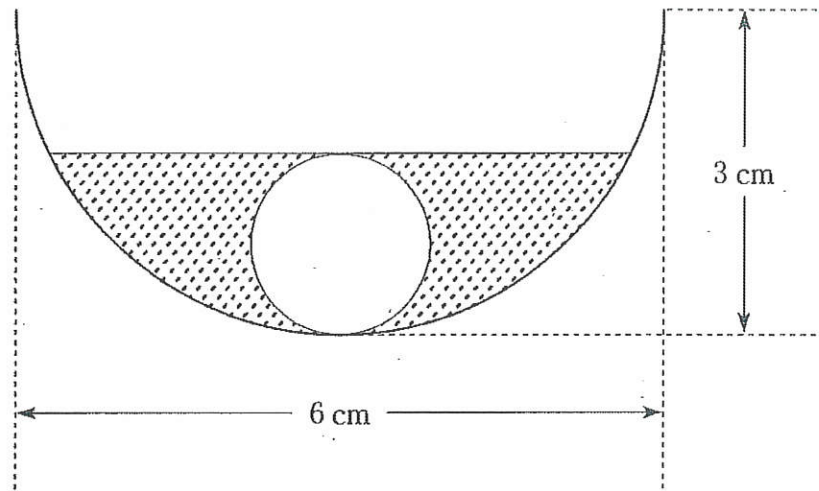


2015年理(数理科学)・医第3問

3 半径3cmの半球形の容器の中に $8\pi\text{cm}^3$ の水が入っている。この容器の水の中に半径 $r\text{cm}$ の鉄の球を静かに入れた。このとき下の断面図のように、鉄の球は水面と上端で接した。 r の値を求めなさい。ただし、容器から水がこぼれることはないものとする。



水と鉄の球の体積の和を $V(r)$ とすると、右の図より

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi \int_{3-2r}^3 y^2 dx \\ &= \pi \int_{3-2r}^3 (q - x^2) dx \\ &= \pi \left[qx - \frac{x^3}{3} \right]_{3-2r}^3 \\ &= \pi \left(27 - q - q(3-2r) + \frac{1}{3}(3-2r)^3 \right) \\ &= \pi \left(12r^2 - \frac{8}{3}r^3 \right) \end{aligned}$$

一方、 $V(r) = 8\pi + \frac{4}{3}\pi r^3$ より、

$$\pi \left(12r^2 - \frac{8}{3}r^3 \right) = 8\pi + \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore r^3 - 3r^2 + 2 = 0$$

$$(r-1)(r^2-2r-2) = 0 \quad \therefore r = 1, 1 \pm \sqrt{3}$$

いま $r > 0$ であり、右上の図より、 $3-2r \geq 0$ より $r \leq \frac{3}{2}$ $\therefore 0 < r \leq \frac{3}{2}$

であるから、条件をみたす r は、 $r=1$ //

