



2017年理学部第2問

2  $\alpha$  を複素数の定数とし、自然数  $n$  に対して複素数  $z_n$  を

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = \alpha z_n + 1 - \alpha$$

で定める。以下の各問に答えよ。

- (1)  $z_2, z_3, z_4$  をそれぞれ  $\alpha$  を用いて表せ。
- (2) 一般の  $n$  について  $z_n$  を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。  
以下では、 $\alpha = \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$  とする。ただし、 $i$  は虚数単位を表し、 $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。
- (3)  $\frac{\theta}{\pi}$  が無理数であるとき、どんな自然数  $n$  に対しても  $z_{n+1}$  は実数にならないことを示せ。
- (4) 自然数  $n$  に対して、複素数平面上の2点  $z_n$  と  $z_{n+1}$  との距離を  $l_n$  とする。無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$  の和  $L$  を求めよ。  
さらに、 $\theta$  が  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲を動くとき、 $L$  の最大値とそのときの  $\theta$  の値を求めよ。