慶應義塾大学

2017年 理工学部 第3問

$\boxed{3}$ $f(x)$を閉区間$[0,\ 1]$で定義された連続な増加関数とし，nを正の整数とする．また，I_n，J_nを

$$I_n = \int_0^1 f(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$
$$J_n = \int_0^1 f(x)\left|\sin((2n+1)\pi x)\right|\,dx$$

で定める．

(1) xについての方程式$\sin((2n+1)\pi x) = 0$の実数解で区間$[0,\ 1]$に属するものは $\boxed{\text{テ}}$ 個ある．それらを小さい順にx_0，x_1，x_2，$\cdots$，x_N（$N = \boxed{\text{テ}} - 1$）と並べると，$x_k = \boxed{\text{ト}}$ （$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N$）である．

次に，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \boxed{\text{テ}} - 2$に対して，$a_k$を

$$a_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

で定める．このとき，次の(F1)，(F2)が成り立つ．

(F1) kが偶数のとき　$f(x_k)\dfrac{2}{(2n+1)\pi} \leqq a_k \leqq f(x_{k+1})\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$

(F2) kが奇数のとき　$-f(x_{k-1})\dfrac{2}{(2n+1)\pi} \leqq a_k \leqq -f(x_k)\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$

(2) (F1)が成り立つことを証明しなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$が成り立つことを証明しなさい．必要であれば，(F1)，(F2)を証明なしに用いてよい．

(4) 数列$\{J_n\}$の極限は関数$f(x)$の定積分を用いて$\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = \boxed{\text{ナ}}$ と表すことができる．