

2015年第3問

3 e を自然対数の底とし、 t を $t > e$ となる実数とする。このとき、曲線 $C: y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる2点で交わるので、交点のうち x 座標が小さいものを P 、大きいものを Q とし、 P 、 Q の x 座標をそれぞれ α 、 β ($\alpha < \beta$) とする。また、 P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし、曲線 C 、 x 軸および2つの直線 $x = \alpha$ 、 $x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1 、曲線 C および2つの直線 PR 、 QR で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき、次の問に答えよ。

(1) $\frac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ。

(2) $\alpha < \frac{e}{t}$ 、 $\beta < 2 \log t$ となることを示し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。必要ならば、 $x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい。