

2012年理（数理情報科・応用物理・応用化学）第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) 実数 θ に対し、 $O(0, 0, 0)$ を原点とする座標をもつ空間において、3点

$$P(\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad Q(0, \cos \theta, \sin \theta), \quad R(0, \cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

を考える。

(i) θ が $-\pi \leq \theta < \pi$ の範囲を動くとき、 PQ^2 の最大値は であり、最大値を与える θ の値は $-\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}\pi$ と $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}\pi$ である。

(ii) ベクトル \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OR} のなす角を α とする。 θ が $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $\cos \alpha$ の最大値は $\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$ であり、最大値を与える θ の値は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}\pi$ である。 θ が $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $\cos \alpha$ の最大値は $\frac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}}$ である。 θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $\cos \alpha$ の最大値は であり、最大値を与える θ の値は $-\frac{\text{ス}}{\text{セ}}\pi$ である。

(2) 零行列でない2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が、等式 $A^2 = 4A$ を満たしているとする。

(i) $bc = 0$ のとき、 $a + d$ の値は または である。また、 $bc \neq 0$ のとき、 $a + d = \text{チ}$, $ad - bc = \text{ツ}$ となる。特に、 $b = c > 0$ とすると、

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{(\text{テ} - \text{ト})a} \\ \sqrt{(\text{ナ} - \text{ニ})a} & \text{ヌ} - \text{ネ} \end{pmatrix}$$

となる。

(ii) 自然数 n に対し、

$$\sum_{k=1}^n {}_n C_k 4^k 3^{n-k} = \text{ノ}^n - \text{ハ}^n$$

であるから、

$$(A + 3E)^n = \frac{\text{ヒ}}{\text{フ}} (\text{ヘ}^n - \text{ホ}^n)A + \text{マ}^n E$$

となる。ここで、 E は2次の単位行列を表す。