

2016年 全学部 2月3日 第2問


 数理  
石井K

2  $x \leq y \leq z$  かつ  $xy + yz + zx = xyz$  を満たす自然数  $x, y, z$  の組をすべて求めよ.

$x, y, z$  は自然数より.  $x > 0, y > 0, z > 0$

与式の両辺を  $xyz (> 0)$  でわって.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad \dots (*)$$

$x \leq y \leq z$  より.  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$  なので

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\therefore \frac{3}{x} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3$$

よって.  $x$  のとりうる値は.  $x = 1, 2, 3$

(i)  $x = 1$  のとき.

(\*)より.  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$  これは  $y > 0, z > 0$  より不適.

(ii)  $x = 2$  のとき.

$$(*)より \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ なので } \frac{2}{y} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 4$$

$y = 2$  のとき  $\frac{1}{z} = 0$  となり不適.  $y = 3$  のとき.  $z = 6$ .  $y = 4$  のとき  $z = 4$

(iii)  $x = 3$  のとき

$$(*)より \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ なので } \frac{2}{y} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 3 \text{ より } y = 3$$

このとき.  $z = 3$  と決る.

(i) ~ (iii) より.  $(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

"

(注) 2015年, 2016年と

日本福祉大の整数は  
他分野と比べて異常に難しい  
ので. 気を付けて!

(とれよと=3まで必ずとろう!)

ただし. この問題は

難関大ではよく出る

有名問題