

2013年第6問

6 3次関数 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $x = p, x = q$ ($p \neq q$) において極値をとるとき、
 $\frac{f(p) - f(q)}{(p - q)^3} = -\frac{a}{2}$ となることを示せ.

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) &= [f(x)]_q^p \\ &= \int_q^p f'(x) dx \\ &= \int_q^p 3a(x-p)(x-q) dx \\ &= 3a \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) (p-q)^3 \\ &= -\frac{a}{2} (p-q)^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f(p) - f(q)}{(p - q)^3} = -\frac{a}{2} \quad \text{が成り立つ} \quad \square$$