0002094635097999

信州大学

2015年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ nを自然数とする．

(1) n以下の非負の整数kについて，関数$x(1+x)^n$の導関数のx^kの係数を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$を示せ．

(1) $f(x)=x(1+x)^n$ とおくと，2項定理により，

$$f(x)=x\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i\,x^i$$

$$=\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i\,x^{i+1}$$

よって，$f'(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(i+1)\,{}_nC_i\cdot x^i$ …(*)　∴ 導関数のx^kの係数は，$\underline{(k+1)\,{}_nC_k}$ //

(2) (1)と同じ$f(x)$を考える．(*)の両辺にxをかけて

$$xf'(x)=\sum_{i=0}^{n}(i+1)\,{}_nC_i\,x^{i+1}$$

$$\therefore\ \{xf'(x)\}'=\sum_{i=0}^{n}(i+1)^2\,{}_nC_i\cdot x^i$$

(結果は変わらないから iをkにおきなおした)

これより，$f'(x)+xf''(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2\,{}_nC_k\,x^k$

$x=1$を代入して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2\,{}_nC_k=f'(1)+f''(1)$ …(**)

ここで，積の微分法より，

$$f'(x)=(1+x)^n+x\cdot n(1+x)^{n-1}$$

$$f''(x)=n(1+x)^{n-1}+n(1+x)^{n-1}+nx\cdot(n-1)(1+x)^{n-2}$$

$$\therefore\ f'(1)=2^n+n\cdot2^{n-1},\quad f''(1)=n\cdot2^n+n(n-1)\cdot2^{n-2}$$

(**)に代入して，

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2\,{}_nC_k=2^{n-2}(4+2n+4n+n^2-n)$$

$$=(n+1)(n+4)2^{n-2}\quad ▨$$