



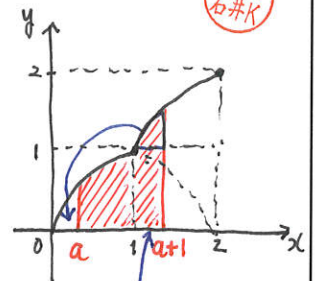
2014年文系第3問

3 関数  $f(x)$  を

(4)

$$f(x) = [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2$$

と定める。ここで、 $[x]$  は  $n \leq x$  を満たす最大の整数  $n$  を表す。

(1)  $f(x) \geq x$  であることを示せ。(2)  $f(x+1) = f(x) + 1$  であることを示せ。(3)  $0 \leq x \leq 2$  において、 $y = f(x)$  のグラフを描け。(4)  $0 \leq a < 1$  とするとき、 $\int_a^{a+1} f(x) dx$  を求めよ。

$$\therefore \int_a^{a+1} f(x) dx$$

$$= \int_0^1 2x - x^2 dx + a \quad \text{長方形の面積}$$

$$= \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + a$$

$$= a + \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} (1) f(x) - x &= [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2 - x \\ &= x - [x] - (x - [x])^2 \end{aligned}$$

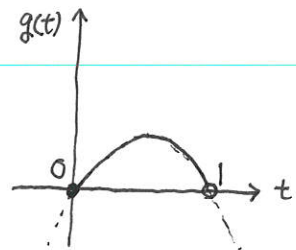
ここで、 $t = x - [x]$  において  $f(x) - x$  を  $t$  で表したものを  $g(t)$  とおくと。

$$g(t) = -t^2 + t$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$0 \leq t < 1$  であるから、右のグラフより、 $g(t) \geq 0$

すなわち  $f(x) \geq x$   $\square$

(2)  $[x+1] = [x] + 1$  より。

$$\begin{aligned} f(x+1) &= [x+1] + 2(x+1 - [x+1]) - (x+1 - [x+1])^2 \\ &= [x]+1 + 2(x+1 - [x]-1) - (x+1 - [x]-1)^2 \\ &= [x]+1 + 2(x - [x]) - (x - [x])^2 \\ &= f(x) + 1 \quad \square \end{aligned}$$

(3)  $0 \leq x < 1$  において  $[x] = 0$   $\therefore f(x) = 2x - x^2$ 

$1 \leq x < 2$  においては (2) より、 $f(x) = f(x-1) + 1$

$\therefore$  右のグラフになる。

